

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

BEC e superfluidità: analogie e differenze

Relatore:
Prof. Loris Ferrari

Presentata da:
Lorenzo Margotti

Anno Accademico 2017/2018

Sommario

Argomento principale delle note seguenti è la descrizione del fenomeno della superfluidità in relazione al condensato di Bose-Einstein. Ai fini della trattazione saranno fatti riferimenti ad importanti risultati teorici e sperimentali, utili a fornire una panoramica il più possibile completa senza indugiare in formalismi e dettagli (comunque presenti in minima parte) che, per quanto interessanti, bisognerebbero di ulteriori approfondimenti. Verrà quindi fatto accenno alla teoria dello spettro eccitato di Bogoliubov, la quale, a partire dalle interazioni fra particelle, fornisce modelli e previsioni per i gas di Bose-Einstein applicabili al concetto di superfluidità; verranno introdotte le equazioni di Gross-Pitaevskii, la cui forma dipendente dal tempo descrive l'evoluzione temporale della funzione d'onda del condensato; sarà dedicato un intero capitolo al fenomeno della superfluidità, con accenno alle teorie di Landau ed al formalismo di base per la idrodinamica quantistica, fondamentale per lo studio del modello a due fluidi e per l'analisi sul decadimento dei fononi.

Indice

1	Introduzione	3
2	Gas di bosoni e relative implicazioni	7
2.1	Gas ideale di Bose in sistemi grancanonici	7
2.2	Bogoliubov: lo spettro delle eccitazioni	11
2.3	L'equazione di Gross-Pitaevskii	14
3	Superfluidità	19
3.1	Criterio di Landau per la superfluidità	19
3.2	Condensazione di Bose-Einstein e superfluidità	22
3.3	Teoria idrodinamica dei superfluidi a temperatura $T = 0$	23
3.4	Basi di idrodinamica quantistica	24
3.5	Modello a due fluidi: primo e secondo suono	26
3.6	Cenno ai vortici quantizzati	29

Capitolo 1

Introduzione

*The otherwise so important
difference between classical and
quantum mechanics is not relevant
in principle for thermodynamic
considerations*

W. Pauli.

Firenze, conferenza sulla
fondazione della meccanica
statistica quantistica (1948).

Questo interessante punto di vista, espresso dal fisico Wolfgang Pauli, era motivato dall'osservazione tale per cui la descrizione macroscopica del comportamento dei liquidi e dei gas, così come appare scritto nelle equazioni dell'idrodinamica e nelle leggi della termodinamica, risultava essere indipendente dai particolari metodi utilizzati per studiare il moto di singoli atomi in scala microscopica.

Esistono in natura sistemi, definiti superfluidi, il cui comportamento macroscopico cambia radicalmente se la temperatura del sistema stesso scende al di sotto di un punto di transizione. Proprietà caratteristica dei superfluidi è la capacità di scorrere attraverso un qualsiasi condotto capillare senza alcuna resistenza misurabile. Godono di questa proprietà l'elio liquido ed altre sostanze metalliche che prendono il nome di superconduttori, ovvero materiali in cui una corrente qualsiasi non incontra resistenza. La superconduttività venne scoperta nel 1911 da H.Kamerlingh Onnes, che -fra le altre cose- fu anche il primo a liquefare l'elio (1908), portandolo alla temperatura di transizione di 4,2K. Poco più tardi, nel 1927, Wolfke e Keesom notarono una discontinuità nella curva del calore specifico, la cui forma, simile alla lettera greca λ , fu poi l'origine del nome del punto di transizione in corrispondenza di tale discontinuità: il " λ -point", corrispondente a 2,17K (Fig. 1.1). Gli studi di F.London sulla relazione fra teoria quantistica e sistemi macroscopici lo portarono all'idea di superfluido come sistema in cui una macroscopica frazione di particelle deve essere bloccata nello stato fondamentale a causa della bassa temperatura. Tale immagine conduce alla teoria del modello a due fluidi, trattata nel capitolo 3.5, in cui il sistema superfluido è considerato composto da due differenti fluidi che scorrono mescolandosi fra loro: il fluido normale, il cui comportamento è descritto

dalla fluidodinamica classica, che scorre secondo la analisi macroscopica sopra la temperatura di transizione; il superfluido, che corrisponde macroscopicamente allo stato quantico fondamentale occupato. Le proprietà superfluide dell'elio liquido sotto al λ -point vennero dimostrate sperimentalmente grazie all'intervento di Kapitza e, indipendentemente, Allen e Misener (1938). Kapitza fu il primo a verificare il comportamento anomalo dell'elio e coniò il termine superfluidità per associare tale fenomeno alla superconduttività scoperta anni prima. Il suo esperimento condotto nel 1940 (flusso attraverso due recipienti) fu la verifica, almeno qualitativa, dell'idea di London accennata poco sopra. Si precisa che l'elio II, altresì detto elio 4 He, è un gas di bosoni: fu proprio London, infatti, a proporre una visione che unificasse superfluidità e condensato di Bose-Einstein, la cui definizione risale al 1924. I capitoli che seguono hanno lo scopo di descrivere, seppur in maniera semi

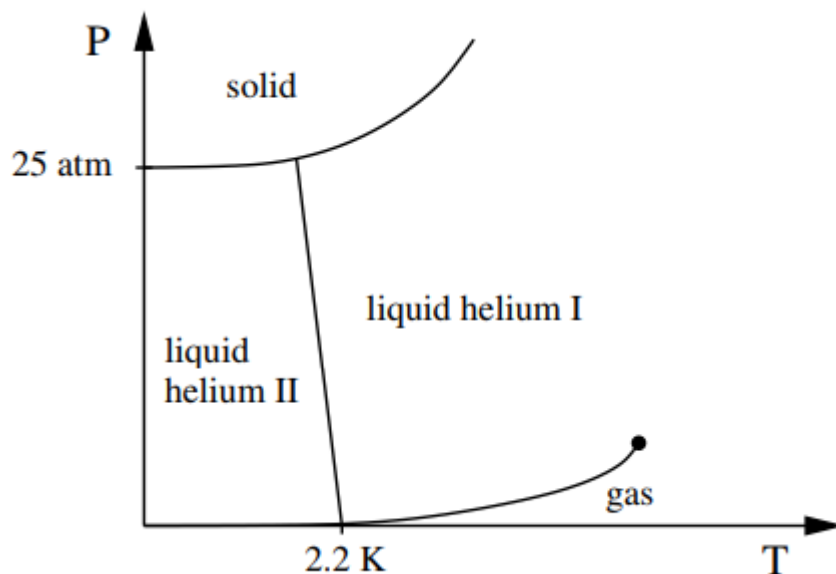


Figura 1.1: Diagramma di fase dell'elio II, pressione in ascissa e temperatura in ordinata. Al di sotto di una determinata pressione, l'elio rimane liquido nonostante temperature molto basse, comportandosi da superfluido.

divulgativa, le profonde origini del fenomeno della superfluidità, la cui storia conta ormai parecchi nomi, teorie ed esperimenti. Il capitolo 2 serve da introduzione a quello che sarà il centro della trattazione. In esso sono raccolte le principali teorie del primo novecento nell'ambito della fisica della materia. Il primo paragrafo prende in esame il sistema grancanonico in cui è inserito un gas ideale di Bose, allo scopo di rendere immediata la realizzazione di un condensato su cui costruire le teorie successive. Il secondo paragrafo completa la definizione di gas di Bose con l'introduzione della teoria dei bosoni interagenti di Bogoliubov, cui si dà merito per lo studio dello spettro delle eccitazioni. Il terzo paragrafo è invece dedicato alle equazioni di Gross-Pitaevskii, delle quali si fornisce un ricavo algebrico e se ne studiano caratteristiche e significato. Esse sono utili allo studio dei gas di Bose non uniformi e diluiti a basse temperature.

Il capitolo 3, infine, è dedicato alla descrizione del fenomeno della superfluidità. Si è cercato di affrontare l'argomento in maniera ordinata e generale, partendo dal

criterio di Landau sulla superfluidità e concludendo con un cenno alla teoria dei vortici quantizzati, caratteristici proprio dei sistemi superfluidi. Il paragrafo 3.2 è da considerarsi il centro della trattazione, poiché in esso è descritta la stretta relazione fra superfluidi e condensati. Il paragrafo 3.4, invece, è stato scritto con l'intenzione di non trascurare il formalismo di base della idrodinamica quantistica, utile allo studio del modello a due fluidi e del fenomeno di decadimento dei fononi.

Riflessioni e problemi per il futuro si lasciano alle conclusioni.

Capitolo 2

Gas di bosoni e relative implicazioni

La descrizione di un gas di Bose ideale consente di esemplificare la più semplice realizzazione di un condensato di Bose-Einstein, le cui previsioni permettono di spiegare correttamente importanti proprietà di sistemi reali. Come già accennato poco sopra, London (1938) ebbe una geniale intuizione: le principali caratteristiche dell'elio superfluido potevano essere interpretate utilizzando concetti base di un gas ideale di Bose, quali la temperatura critica ed il relativo condensato (BEC). In questo capitolo si analizzano teorie ed equazioni che serviranno per comprendere nel dettaglio il concetto di superfluidità descritto nel capitolo successivo.

2.1 Gas ideale di Bose in sistemi grancanonici

La scelta dell'inclusione di un sistema gran canonico permette una netta semplificazione del formalismo relativo alla descrizione in termini quanto-statistici del gas ideale di Bose. Si ricordi che, in un sistema gran canonico, la probabilità per la realizzazione di una configurazione con N' particelle in uno stato k con energia associata E_k è calcolato come segue:

$$P_{N'}(E_k) = \exp(\beta(\mu N' - E_k)), \quad (2.1)$$

dove $\beta = \frac{1}{kBT}$ e μ è il potenziale chimico che garantisce l'equilibrio termico.

Si scrive ora la funzione di partizione canonica Z , dipendente sia da β che da μ :

$$Z(\beta, \mu) = \sum_{N'=0}^{\infty} \sum_k P_{N'}(E_k) = \sum_{N'=0}^{\infty} e^{\beta\mu N'} Q_{N'}(\beta), \quad (2.2)$$

dove $Q_{N'} = \sum \exp(-\beta E_k)$ è la funzione di partizione canonica calcolata per un sistema di N' particelle e il termine Σ serve ad includere tutti gli autostati dell'Hamiltoniana con energia E_k . Le variabili naturali nel sistema gran canonico sono

temperatura e potenziale chimico, necessari anche per la descrizione delle condizioni esterne che agiscono sul sistema dato. Questi parametri, che possono essere intesi come volume V del sistema o la frequenza di oscillazione ω nel caso di trappole armoniche, entrano nella funzione di partizione sopra scritta attraverso gli autovalori E_k dell'Hamiltoniana e non vengono esplicitamente indicati nella equazione (2.2). Conoscendo la funzione di partizione canonica è quindi possibile valutare il comportamento termodinamico del sistema tramite la seguente definizione:

$$\Omega = -kBT \ln Z \quad (2.3)$$

per il potenziale grancanonico $\Omega = E - TS - \mu N$, dove

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} \quad (2.4)$$

è l'entropia del sistema. Vengono quindi formalmente scritti il numero di particelle totali

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \quad (2.5)$$

e l'energia

$$E = \Omega - T \frac{\partial \Omega}{\partial T} - \mu \frac{\partial \Omega}{\partial \mu}; \quad (2.6)$$

quest'ultima coincide con $\sum \sum N' P_{N'}(E_k)$ e $\sum \sum E_k P_{N'}(E_k)$ calcolate a partire da (2.1). Se il sistema è uniforme e occupa un volume V , allora la funzione gran potenziale si riduce a

$$\Omega = -PV \quad (2.7)$$

dove P è la pressione che agisce sul sistema e che -di conseguenza- fornisce le equazioni di stato.

Si consideri ora un sistema descritto dalla Hamiltoniana di una particella indipendente

$$\hat{H} = \sum_i \hat{H}_i^{(1)} \quad (2.8)$$

In questo caso gli autostati k sono definiti specificando l'insieme $\{n_i\}$ dei numeri d'occupazione microscopica n_i degli stati della singola particella, ottenuti risolvendo l'equazione di Schrödinger

$$\hat{H}^{(1)} \varphi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i \varphi_i(\mathbf{r}). \quad (2.9)$$

Infatti, adoperando il formalismo della seconda quantizzazione, lo stato

$$|k\rangle \propto \frac{(a_0^\dagger)^{n_0}}{\sqrt{n_0!}} \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \dots |vac\rangle \quad (2.10)$$

specifica completamente l'autostato (del sistema a multiparticelle) dell'Hamiltoniana (2.8). a_i^\dagger (a_i) sono operatori per la creazione (distruzione) di particelle relativi all' i -esimo stato della particella singola. Essi godono della proprietà commutativa per i bosoni:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (2.11)$$

mentre lo stato $|vac\rangle$ corrisponde al vuoto di particelle ($a_i |vac\rangle = 0$).

La funzione grancanonica (2.2) si adatta perfettamente all'Hamiltoniana (2.8). Infatti, in questo caso $N' = \sum n_i$ e $E_k = \sum \epsilon_i n_i$ con ϵ_i autoenergie della singola particella determinate dalla soluzione dell'eq. di Schrödinger. Posso allora scrivere la funzione di partizione canonica come

$$Z = \sum_{n_0} (e^{\beta(\mu - \epsilon_0)})^{n_0} \sum_{n_1} (e^{\beta(\mu - \epsilon_1)})^{n_1} \dots, \quad (2.12)$$

Dove, nella statistica di Bose, la somma $\sum n$ viene calcolata su ogni $n=0,1,2,\dots$, mentre nel caso fermionico è limitata ai valori $n=0,1$. Da notare è che la funzione Z non dipende strettamente da N' , poiché include tutti i valori possibili di N' . In un gas ideale di Bose, tramite la funzione di partizione canonica si può ricavare la soluzione relativa al potenziale corrispondente:

$$\Omega = k_B T \sum \ln(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}). \quad (2.13)$$

Utilizzando la definizione scritta poco sopra (2.5) è possibile estrapolare il valore del numero totale di particelle N :

$$N = \sum_i \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_i - \mu)] - 1} = \sum_i \bar{n}_i, \quad (2.14)$$

il quale può essere scritto come la somma dei numeri d'occupazione mediati

$$\bar{n}_i = -\frac{\partial}{\partial B \epsilon_i} \ln Z = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_i - \mu)] - 1} \quad (2.15)$$

di ogni stato della singola particella. Con ciò, è semplice scrivere le funzioni termodinamiche di energia E

$$\sum_i \frac{\epsilon_i}{\exp[\beta(\epsilon_i - \mu)] - 1} \quad (2.16)$$

ed entropia S

$$\frac{S}{k_B} = \sum_i [(1 + \bar{n}_i) \ln(1 + \bar{n}_i) - \bar{n}_i \ln(\bar{n}_i)] \quad (2.17)$$

$$= \sum_i \left[\frac{\beta(\epsilon_i - \mu)}{\exp[\beta(\epsilon_i - \mu)] - 1} - \ln(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}) \right]. \quad (2.18)$$

Il risultato relativo al numero di occupazione (2.15) fornisce l'importante restrizione fisica per il potenziale chimico di un gas ideale di Bose : $\mu < \epsilon_0$, dove ϵ_0 rappresenta il più piccolo autovalore dell'Hamiltoniana $H^{(1)}$. La violazione di questa disuguaglianza porterebbe ad un valore negativo per il numero di occupazione degli stati con energia inferiore a μ . Quindi, per μ che tende a ϵ_0 , il numero di occupazione

$$N_0 \equiv \bar{n}_0 = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_0 - \mu)] - 1} \quad (2.19)$$

tende a crescere a dismisura. Questo è in realtà ciò che sta all'origine del condensato di Bose-Einstein.

Si scriva, ora, il numero totale di particelle come

$$N = N_0 + N_T \quad (2.20)$$

dove

$$N_T(T, \mu) = \sum_{i \neq 0} \bar{n}_i(T, \mu) \quad (2.21)$$

rappresenta il numero di particelle al di fuori del condensato (esso è anche detto componente termica del gas). Essendo proporzionale alla densità degli stati, il valore di N_T cresce proporzionalmente alle dimensioni del sistema. Per $T=\text{costante}$, la funzione N_T si comporta come funzione appartenente a C^∞ poiché funzione di μ e raggiunge il suo massimo N_c quando $\mu = \epsilon_0$ (Fig. 2.1). Il comportamento di N_0 è tuttavia piuttosto differente. Infatti N_0 è sempre di ordine 1, eccetto il caso in cui il potenziale chimico tende a ϵ_0 , poiché N_0 diverge. Se $N_c = N_T(T, \mu = \epsilon_0)$ è maggiore di N , l'equazione (2.20) risulta a tutti gli effetti soddisfatta per valori di μ più piccoli di ϵ_0 e N_0 è trascurabile rispetto a N . Essendo la funzione $N_c(T)$ funzione crescente di T , deve esistere una temperatura critica T_c sopra la quale si verifica quanto detto sopra; essa è definita dalla relazione

$$N_T(T_c, \mu = \epsilon_0) = N. \quad (2.22)$$

Se invece $N_c(T)$ fosse minore di N (o, equivalentemente, $T < T_c$) il contributo del condensato sarebbe cruciale al fine di soddisfare le condizioni di normalizzazione (2.20) ed il valore di μ si avvicinerebbe a ϵ_0 nel limite termodinamico (N grande). La temperatura T_c , quindi, definisce la temperatura critica sotto la quale il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein, ossia l'occupazione macroscopica di uno stato della singola particella, si manifesta.

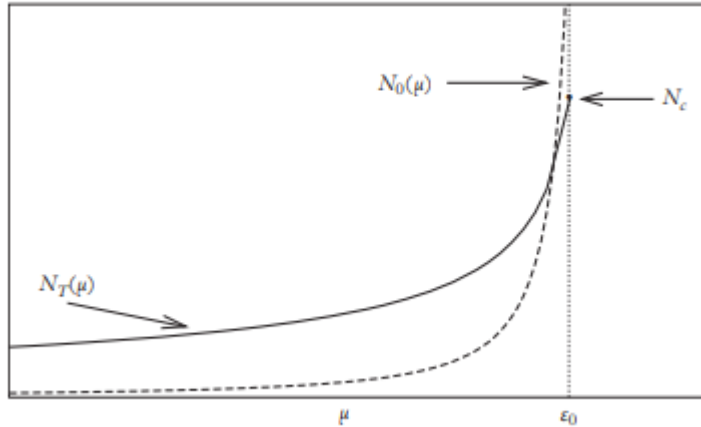


Figura 2.1: Modello di gas ideale. Il numero di particelle fuori dal condensato (N_T) e nel condensato (N_0) come funzioni del potenziale chimico a T fissato. Il reale valore di μ è determinato dalla condizione di normalizzazione (2.20). Nel caso di $N > N_c$, il sistema mostra, al limite termodinamico, la condensazione di Bose-Einstein.

2.2 Bogoliubov: lo spettro delle eccitazioni

Un gas ideale di Bose, descritto precedentemente, è un sistema peculiare: è sufficiente ricordare che, in presenza di un condensato, tale sistema gode di compressibilità infinita. In effetti è tutt'altro che sorprendente notare quanto le interazioni fra le particelle abbiano effetti drastici sulle proprietà del gas, ch'esso sia diluito o ideale. Senza interazioni, tutta via, un gas quasi ideale presenta una energia pari a zero nello stato fondamentale: questo non permette l'applicazione delle tradizionali tecniche perturbative per lo studio del problema. Nelle righe che seguono verrà illustrata la teoria di Bogoliubov (1947), il quale elaborò un metodo per descrivere le eccitazioni di un sistema bosonico in regime lineare, tale da riuscire a calcolare lo spettro delle eccitazioni (fluttuazioni termiche o quantistiche). In un sistema lineare, come a breve verrà enunciato, tali eccitazioni risultano essere fononi, la cui presenza è strettamente collegata alle proprietà superfluide del sistema.

Si dà ora la condizione tal per cui è possibile considerare un gas debolmente interagente:

$$|a| \ll d \quad (2.23)$$

dove d è la distanza media fra le particelle, determinata dalla densità del gas, mentre a rappresenta la lunghezza di scattering dell'onda s . Si consideri un gas di bosoni descritto dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\right) + V(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

in cui gli operatori di campo $\hat{\psi}^\dagger$ e $\hat{\psi}$ soddisfano le regole di commutazione

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.25)$$

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}')] = 0 \quad (2.26)$$

$$[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = 0 \quad (2.27)$$

e si supponga di essere al di sotto della temperatura critica, condizione per la quale è possibile separare l'operatore di campo $\hat{\psi}$ nella parte relativa al condensato $\psi(\mathbf{r})$ e nella parte delle fluttuazioni $\phi(\mathbf{r})$

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + \hat{\phi}(\mathbf{r}) \quad (2.28)$$

Così facendo risulta possibile ridefinire la matrice identità

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle = \varphi^*(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}') + \langle \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\phi}(\mathbf{r}') \rangle \quad (2.29)$$

Diviene utile al raggiungimento del risultato il passaggio ad una descrizione di tipo statistico, introducendo un'Hamiltoniana gran canonica nella forma semplice

$$\hat{K} = \hat{H} - \mu \hat{N} = \hat{H} - \mu \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (2.30)$$

in cui il potenziale chimico μ ha ruolo di moltiplicatore di Lagrange associato alla conservazione del numero di particelle (in media). Operando semplici sostituzioni

e trascurando termini in ϕ di ordine superiore al secondo è possibile scrivere la seguente Hamiltoniana

$$\hat{K}_B = \int d\mathbf{r} \varphi^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu + \frac{g}{2} |\varphi|^2 \right] \varphi \quad (2.31)$$

$$+ \int d\mathbf{r} \hat{\phi}^\dagger \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu + 2g |\varphi|^2 \right] \hat{\phi} \quad (2.32)$$

$$+ \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} (\varphi^{*2} \hat{\phi} \hat{\phi} + \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}^\dagger \varphi^2) \quad (2.33)$$

che prende il nome di Hamiltoniana di Bogoliubov. Essa risulta essere univocamente determinata dalla costante di interazione di coppia g ; soddisfa inoltre le equazioni di Gross-Pitaevskii (vedi par. 2.3). Tale Hamiltoniana è quadrata e -si ricorre al teorema spettrale dell'algebra- è possibile diagonalizzarla scrivendo il termine di condensato

$$\varphi = \sqrt{n_0} e^{iS} \quad (2.34)$$

ed introducendo la seguente trasformazione per i termini $\hat{\phi}^\dagger$ e $\hat{\phi}$ relativi alle fluttuazioni

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = e^{iS} \sum_j [u_j(\mathbf{r}) \hat{\alpha}_j - v_j^*(\mathbf{r}) \hat{\alpha}_j^\dagger] \quad (2.35)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}) = e^{-iS} \sum_j [u_j^*(\mathbf{r}) \hat{\alpha}_j^\dagger - v_j(\mathbf{r}) \hat{\alpha}_j] \quad (2.36)$$

dove la somma è estesa solo alla parte non condensata. Gli operatori α_j e $\hat{\alpha}_j^\dagger$ possono essere interpretati come operatori di distruzione e creazione di quasiparticelle, mentre u_j e v_j risultano essere associati a funzioni su campo complesso che rappresentano le relative autofunzioni delle eccitazioni del sistema. I primi, quindi, devono obbedire alle regole di commutazione tipiche di operatori di creazione e distruzione :

$$[\hat{\alpha}_j, \hat{\alpha}_k^\dagger] = \delta_{ij} \quad (2.37)$$

$$[\hat{\alpha}_j, \hat{\alpha}_k] = [\hat{\alpha}_j^\dagger, \hat{\alpha}_k^\dagger] = 0 \quad (2.38)$$

Inoltre, la composizione di tali regole con le regole di commutazione fra gli operatori ϕ , si ottengono le relazioni di completezza

$$\sum_j [u_j(\mathbf{r}) u_j^*(\mathbf{r}') - v_j^*(\mathbf{r}) v_j(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.39)$$

$$\sum_j [u_j(\mathbf{r}) v_j^*(\mathbf{r}') - v_j^*(\mathbf{r}) u_j(\mathbf{r}')] = 0 \quad (2.40)$$

$$\sum_j [u_j^*(\mathbf{r}) v_j(\mathbf{r}') - v_j(\mathbf{r}) u_j^*(\mathbf{r}')] = 0 \quad (2.41)$$

tramite le quali è possibile scrivere l'Hamiltoniana di Bogoliubov in forma diagonale:

$$\hat{K}_B = \int d\mathbf{r} \varphi^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu + \frac{g}{2} |\varphi|^2 \right] \varphi \quad (2.42)$$

$$- \sum_j \int d\mathbf{r} E_j |v_j(\mathbf{r})|^2 + \sum_j E_j \hat{\alpha}_j^\dagger \hat{\alpha}_j \quad (2.43)$$

In essa compaiono il funzionale energia di Gross-Pitaevskii (prima riga); il termine di deplezione quantistica, ovvero il primo integrale, strettamente legato a fluttuazioni quantistiche e -di conseguenza- trascurabile in prima approssimazione; un termine di Hamiltoniana libera per le quasiparticelle associate agli operatori, che rappresentano eccitazioni termiche ($T \neq 0$) o quantistiche ($T = 0$). Tale Hamiltoniana può esser scritta anche nella forma seguente:

$$\hat{H} = E_0 + \sum \epsilon(p) \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p, \quad (2.44)$$

dove

$$E_0 = g \frac{N^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \left[\epsilon(p) - gn - \frac{p^2}{2m} + \frac{m(gn)^2}{p^2} \right] \quad (2.45)$$

è l'energia dello stato fondamentale calcolata sul più alto ordine di approssimazione, mentre

$$\epsilon(p) = \left[\frac{gn}{m} p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.46)$$

è conosciuta come la legge di dispersione per le eccitazioni elementari del sistema (Bogoliubov, 1947). Ne consegue che lo stato fondamentale del sistema interagente corrisponde al vuoto delle quasiparticelle. (Si noti che la scelta di utilizzare due diverse lettere a e b per la definizione degli operatori non deve trarre in inganno: si tratta in entrambi i casi di operatori di distruzione e creazione di quasiparticelle, i quali hanno tuttavia diverso significato matematico nelle due forme presentate). Per concludere, si analizza ora il caso limite in cui $p \ll mc$: in questo caso, la legge di dispersione delle quasiparticelle prende la forma

$$\epsilon(p) = cp \quad (2.47)$$

tipica dei fononi, dove

$$c = \sqrt{gn/m} \quad (2.48)$$

è la velocità del suono. La teoria di Bogoliubov, quindi, giunge a prevedere onde sonore partendo dalle eccitazioni di un gas di Bose interagente (fig 2.2). Queste eccitazioni possono essere viste come *Goldstone modes* associati alla rottura di simmetria causata dalla condensazione di Bose-Einstein.

E' interessante notare che, nel regime dei fononi, i coefficienti che caratterizzano le trasformazioni di Bogoliubov manifestano un comportamento divergente infrarosso. Ciò è prova del fatto che, nel regime dei fononi, le trasformazioni di Bogoliubov provocano un drastico cambiamento nella natura delle eccitazioni elementari per quel che concerne i gas ideali.

Si può terminare affermando che il comportamento termodinamico di un gas, le cui eccitazioni siano indipendenti (ciò implica temperature sufficientemente basse), può essere facilmente analizzato partendo dai risultati ottenuti nel precedente paragrafo per i gas ideali, semplicemente fissando il potenziale chimico a zero ed utilizzando l'espressione della legge di dispersione per l'energia delle eccitazioni elementari.

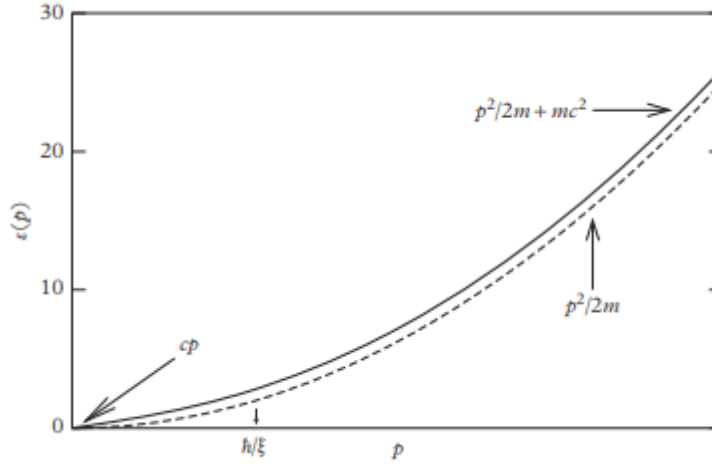


Figura 2.2: Dispersione di eccitazioni elementari in un condensato di Bose-Einstein uniforme; la transizione fra il fonone ed una particella libera ha luogo quando $p \sim h/\xi$.

2.3 L'equazione di Gross-Pitaevskii

Per una trattazione, nei limiti, esaustiva è necessario spendere qualche parola per la teoria sui gas di Bose diluiti non uniformi, trascurando formalismi e piccolezze non necessariamente utili alla comprensione di quanto segue.

Per lo studio di gas non uniformi ed interagenti, serve generalizzare la teoria di Bogoliubov espressa nel paragrafo precedente: al più basso ordine di approssimazione e a basse temperature, è sufficiente sostituire l'operatore $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ con un campo classico $\Psi(\mathbf{r}, t)$, che prenderà il nome di funzione d'onda del condensato (o parametro d'ordine). Questa sostituzione ha profondo significato fisico, poiché analoga alla transizione fra elettrodinamica quantistica e descrizione classica dell'elettromagnetismo. Nel caso qui trattato, la presenza di un grande numero di atomi in un singolo stato (BEC) permette l'introduzione della classica funzione $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Partendo dalla rappresentazione di Heisenberg si cerca ora di giustificare

il passaggio soprascritto:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}] = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}, t) \right. \quad (2.49)$$

$$\left. + \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (2.50)$$

in cui si esplicita la presenza di $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$. Sarebbe ora sbagliato operare la sostituzione per un potenziale realistico. Tuttavia, è possibile fare quanto detto per potenziali leggeri V_{eff} , in cui è applicabile l'approssimazione di Born¹: tale potenziale dovrebbe poter riprodurre le stesse proprietà di low-energy scattering date da un normale potenziale V . Assumendo piccole variazioni di Ψ -si parla di ordine di raggio della forza interatomica- è possibile procedere, ottenendo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext} + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.51)$$

con

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (2.52)$$

dove si è usata l'espressione della forma integrale di g in termini di lunghezze di scattering di onde a , dove a indica l'ampiezza. Questa equazione è nota come equazione di Gross(1961) Pitaevskii(1961), i cui lavori furono indipendenti l'uno dall'altro; essa è utilizzata per lo studio dei gas di Bose non uniformi diluiti a basse temperature.

Due sono le peculiarità che si deducono dalla (2.51). La prima consiste in una dipendenza della equazione dalla costante di Planck, la quale tuttavia non compare nelle equazioni di Maxwell. La ragione è da trovarsi nella differente relazione fra energia e momento nel caso di fotoni e atomi: da ciò consegue una nuova differente relazione fra frequenza $\omega = \epsilon/\hbar$ ed il vettore d'onda $k = p/\hbar$ di onde corrispondenti. Per i fotoni, la relazione $\epsilon = cp$ fornisce la relazione di dispersione classica $\omega = ck$. Per gli atomi, invece, tale relazione contiene una dipendenza esplicita da \hbar . Ciò implica che i fenomeni coerenti, come l'interferenza, sono strettamente dipendenti dal valore della costante di Planck. La seconda peculiarità è la non linearità dell'equazione. Deriva dalla interazione fra le particelle e introduce una importante analogia fra BEC in gas di atomi e l'ottica non lineare.

Si discutono ora brevemente le condizioni di applicabilità della equazione di Gross-Pitaevskii. In primis, il numero totale di atomi deve essere grande abbastanza da poter applicare il concetto di condensato di Bose-Einstein al sistema preso in esame. In secundis, ai fini di sostituire l'operatore con il campo classico è necessario che l'assunzione di interazione debole sia soddisfatta; infine, la temperatura T del campione deve essere sufficientemente bassa ai fini di una corretta applicazione. Queste condizioni permettono di ignorare lo svuotamento quantistico e termico

¹Nella teoria dello scattering ed in particolare in meccanica quantistica, l'approssimazione di Born consiste nel prendere il campo incidente invece del campo totale come il campo guida in ogni punto della regione dove agisce il potenziale dispersivo. Si tratta di un metodo perturbativo, i cui risultati valgono se il campo diffuso è piccolo rispetto a quello incidente all'interno della regione di dispersione.

del condensato; è inoltre implicita la normalizzazione del parametro d'ordine al numero totale di atomi:

$$\int |\Psi|^2 d\mathbf{r} = N \quad (2.53)$$

Tale condizione è la stessa richiesta per la derivazione della teoria di Bogoliubov descritta precedentemente ed implica che la densità del condensato coincida con la densità del gas:

$$n(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2 \quad (2.54)$$

Una ulteriore condizione è la seguente: è permesso far uso dell'equazione solo per studiare fenomeni che abbiano luogo a distanze molto maggiori della lunghezza di scattering, poiché non è possibile ricondurre a livello microscopico le condizioni di derivazione della (2.51). Premesso ciò, è facile ricavare la funzione d'onda per corpi non singoli che corrisponde ad una data soluzione della equazione (2.51): tramite l'approssimazione di Hartree-Fock si ottiene

$$\Phi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\Psi_a(\mathbf{r}_1)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\Psi_a(\mathbf{r}_2)\right)\dots\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\Psi_a(\mathbf{r}_N)\right) \quad (2.55)$$

dove Ψ_a è il parametro d'ordine ottenibile risolvendo (2.51). Essendo l'equazione di Gross-Pitaevskii non lineare, ci si aspetta che le soluzioni non siano necessariamente ortogonali. Ciò appare in netto contrasto con la condizione di ortogonalità prevista dalla meccanica quantistica. La spiegazione a questa stranezza risulta tuttavia semplice: è necessario distinguere il parametro d'ordine dalla funzione d'onda. Infatti, per quanto i parametri d'onda non risultino ortogonali, non si può dire lo stesso per le relative funzioni d'onda, le quali risultano effettivamente ortogonali nel limite termodinamico; il prodotto scalare verrà quindi espresso come

$$(\Phi_a, \Phi_b) = (N^{-1} \int d\mathbf{r} \Psi_a^* \Psi_b)^N \quad (2.56)$$

quantità che tende a zero per N che tende ad infinito, mentre l'integrale

$$N^{-1} \int d\mathbf{r} \Psi_a^* \Psi_b \quad (2.57)$$

risulterà sempre inferiore all'unità, eccezion fatta per il caso in cui $\Psi_a \equiv \Psi_b$.

Si discutono ora le leggi di conservazione associate alla equazione di Gross-Pitaevskii. Per prima cosa, ciò che risulta immediatamente è la conservazione del numero di atomi

$$N = \int |\Psi|^2 d\mathbf{r}. \quad (2.58)$$

Moltiplicando la (2.51) per Ψ^* e sottraendone il complesso coniugato, si ottiene l'equazione di continuità qui scritta

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0 \quad (2.59)$$

nella quale si introduce il vettore densità di corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ definito come segue:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = n \frac{\hbar}{m} \nabla S. \quad (2.60)$$

Dalla equazione (2.59) immediatamente segue che $dN/dt = 0$ e la definizione di \mathbf{j} mostra come il vettore

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{r}, t) \quad (2.61)$$

rappresenti la velocità di scorrimento del condensato, la quale risulta essere irrotazionale. $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ è caratteristica tipica dei superfluidi e verrà discussa nel capitolo 3. Dalla equazione (2.51) si deduce che l'energia del sistema, data dalla espressione

$$E = \int d\mathbf{r} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) |\Psi|^2 + \frac{g}{2} |\Psi|^4 \right) \quad (2.62)$$

risulta conservata, ovvero $dE/dt = 0$ (tale risultato è vero se e solo se il potenziale esterno risulta indipendente dal tempo). Infine, l'equazione per il momento densità del gas può essere scritta come

$$m \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = -n \frac{\partial V_{ext}}{\partial x_i} \quad (2.63)$$

dove

$$\Pi_{ik} = \frac{\hbar^2}{4m^2} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_k} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x_i \partial x_k} + \dots \right] + \frac{gn^2}{2} \delta_{ik} \quad (2.64)$$

rappresenta il tensore relativo al momento del flusso. L'equazione (2.63) mostra esplicitamente come, in assenza di campi esterni, il momento totale sia conservato. E' utile ai fini della trattazione derivare una esplicita equazione per la fase S del parametro d'ordine:

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} S + \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_s^2 + V_{ext} + gn - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} \right) = 0 \quad (2.65)$$

Da essa è infatti possibile definire il termine “pressione quantistica”, che corrisponde al termine dipendente dalla costante di Planck e dal gradiente della densità: esso rivela che l'importanza degli effetti quantistici è enfatizzata nei gas non uniformi. Per concludere il paragrafo, si analizza il caso stazionario, nel quale la equazione di Gross-Pitaevskii risulta formalmente semplificata: la funzione d'onda del condensato varia nel tempo in accordo con la seguente legge:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\right). \quad (2.66)$$

La dipendenza dal tempo è determinata dal potenziale chimico

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} \quad (2.67)$$

e la equazione principale si riduce alla forma

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi_0(\mathbf{r})|^2 - \mu \right) \Psi_0(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.68)$$

per la quale si assume un potenziale esterno non dipendente dal tempo. Quest'ultima equazione ammette soluzioni distinte. La radice corrispondente allo stato con minore energia definisce il parametro d'ordine dello stato fondamentale e, in

generale, risulta essere una funzione reale. Nel caso di stati eccitati, le soluzioni risultano essere funzioni complesse, la cui chiara esemplificazione è data dai vortici, anch'essi tipici dei superfluidi. Per un gas uniforme, in assenza di potenziale esterno, l'equazione ridotta fornisce semplicemente

$$\mu = g|\Psi_0|^2 = . \quad (2.69)$$

Nello stesso limite, l'espressione dell'energia esplicitata poco sopra coincide con l'espressione di Bogoliubov per l'energia dello stato fondamentale. Si può quindi concludere che la teoria qui presentata corrisponde all'approssimazione all'ordine più basso della teoria di Bogoliubov, descritta nel paragrafo 2, nel caso di gas uniformi.

Capitolo 3

Superfluidità

Il concetto di superfluidità, al quale si è fatto accenno nelle sezioni precedenti, verrà qui di seguito ripreso in maniera il più possibile dettagliata, allo scopo di chiarirne il significato dai punti di vista fisico e matematico. Come già detto, la superfluidità è strettamente collegata al fenomeno della condensazione di Bose-Einstein (F.London, 1935). Un superfluido è in grado di scorrere attraverso sottilissimi tubi o fessure senza alcuna dissipazione di energia: si parla di viscosità nulla. La caratteristica superfluidità dell'elio liquido He II, al di sotto di una particolare temperatura indicata con λ (2,17K), venne scoperta indipendentemente da Kapitza (1938) e Allen e Misener (1938); fu necessario aspettare il 1941 per una corretta spiegazione del fenomeno. Landau mostrò come, in condizioni particolari dello spettro delle eccitazioni elementari, il moto del fluido non potesse dare origine a dissipazioni di alcun tipo. In questo capitolo verranno sviluppate le argomentazioni portate da Landau e verrà discusso il ruolo cruciale dell'irrotazionalità, caratteristica dei moti superfluidi. L'irrotazionalità è in particolar modo legata direttamente alla condensazione di Bose-Einstein, essendo naturalmente associata alla fase del parametro d'ordine che determina la forma del potenziale velocità. Saranno inoltre trattate la teoria idrodinamica e la quantizzazione dei vortici (seppur in maniera semi-divulgativa), al fine di chiarificare maggiormente la concettuale differenza fra superfluidità e condensato di Bose-Einstein, che non appare evidente in gas diluiti a tre dimensioni.

3.1 Criterio di Landau per la superfluidità

Il principale ruolo nella teoria di Landau è svolto dalle leggi di trasformazione di energia e momento governate da trasformazioni Galileiane. Posti E e \mathbf{P} , rispettivamente, energia e momento del fluido in un sistema di riferimento K , si scrive

ora la relazione che segue

$$E' = E - \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}MV^2 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - M\mathbf{V} \quad (3.2)$$

dove M è la massa totale e gli elementi dotati di indice corrispondono a valori di P ed E in un sistema di riferimento K' che si muove con velocità V rispetto a K . In principio, si consideri un fluido uniforme a temperatura uguale a zero, il quale scorre lungo un tubo capillare a velocità costante v . In base alle leggi di fluidodinamica classica, la presenza di viscosità produce necessariamente dissipazione di energia (calore) e, conseguentemente, una diminuzione di energia cinetica. Nella seguente trattazione, si terrà conto solo dei processi dissipativi ottenibili attraverso la creazione di eccitazioni elementari. Si prenda in esame il caso in cui il sistema di riferimento si muove con il fluido. Una singola eccitazione di momento \mathbf{p} che appare nel fluido permette la scrittura dell'energia totale come

$$E_0 + \epsilon(\mathbf{p}) \quad (3.3)$$

i cui termini sono, rispettivamente, l'energia dello stato fondamentale e dell'eccitazione. Nel sistema solidale con il tubo capillare, invece, energia e momento vengono dati dalle seguenti relazioni, costruite tenendo conto del moto relativo:

$$E' = E_0 + \epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}Mv^2 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{p} + M\mathbf{v} \quad (3.5)$$

Da qui si deduce che, nella formula dell'energia, i termini dipendenti da \mathbf{p} costituiscono l'energia di una eccitazione elementare nel sistema in cui il tubo risulta fermo. Il punto cruciale ora risulta il seguente: il processo spontaneo di creazione di eccitazioni può verificarsi solo se è energeticamente conveniente, ovvero se

$$\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} < 0. \quad (3.6)$$

Ciò è possibile se la velocità risulta $v > \epsilon(\mathbf{p})/p$ (si assume che il campione possa trasferire il momento p al condotto capillare). In questo caso il flusso del fluido diviene instabile e la sua energia cinetica verrà dissipata sotto forma di calore. Nel caso in cui la velocità fosse minore del valore

$$v_c = \min_p \frac{\epsilon(\mathbf{p})}{p} \quad (3.7)$$

dove il minimo è calcolato su ogni valore di \mathbf{p} , la condizione sopra scritta non sarebbe soddisfatta in alcun modo; nessuna eccitazione, quindi, avrebbe spontaneamente luogo. Il criterio di Landau per la superfluidità può essere riassunto nella seguente formula

$$v < v_c \quad (3.8)$$

e garantisce che, se la velocità relativa fra il fluido ed il condotto risulta minore del valore critico dato da (3.7), allora è presente un perpetuo scorrere del fluido senza

attrito. Tale configurazione corrisponde, in breve, ad uno stato di equilibrio metastabile: esso è infatti stabile rispetto alla creazione di eccitazioni elementari, ma si differenzia rispetto al completo equilibrio termodinamico, in cui l'intero sistema risulta in quiete. Ritornando allo spettro delle eccitazioni di Bogoliubov, è facile concludere che un gas di Bose debolmente interagente soddisfa appieno il criterio di Landau per la superfluidità e, per velocità critica, si intende nel tal caso la velocità del suono. Anche superfluidi fortemente interagenti soddisfano il criterio di Landau (vedasi il caso dell'elio ^4He), ma la velocità critica risulta più bassa di quella del suono, a causa di strutture più complesse dello spettro delle eccitazioni. E' interessante notare come, tuttavia, un gas ideale di Bose non sia, secondo quanto detto sopra, un effettivo superfluido: infatti, in quel caso, $\epsilon(\mathbf{p}) = p^2/2m$ ed il valore della velocità critica è uguale a zero. Si prende in esame ora un fluido uniforme a temperatura finita e molto bassa, e si assume che le proprietà termodinamiche del sistema siano equivalenti a quelle di un gas di eccitazioni non interagenti (quasiparticelle) all'equilibrio termico. Queste quasiparticelle possono trasportare parte della massa del sistema, ma, seguendo quanto detto prima, non possono essere create altre eccitazioni a causa del moto del superfluido in relazione al condotto capillare. Il flusso di massa aggiuntiva associata alle quasiparticelle termicamente eccitate non è, tuttavia, un superfluido. Queste eccitazioni infatti possono collidere con le pareti del tubo e cambiare momento ed energia, A causa di tali collisioni, si creano nuove eccitazioni all'interno del sistema, il cui moto mostrerà comportamenti dissipativi riconducibili a fluidi ordinari. Ad una temperatura diversa da zero, quindi, una parte del fluido si comporta come un normale fluido viscoso, mentre la restante assume comportamento superfluido: le collisioni non fanno altro che stabilire l'equilibrio termodinamico delle eccitazioni nel gas. La seguente equazione riassume quanto detto in maniera piuttosto generale (s indica la componente superfluida, n la componente normale):

$$N_{\mathbf{p}} = [\exp(\frac{\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)}{k_B T}) - 1]^{-1} \quad (3.9)$$

Essa è la funzione di distribuzione dell'equilibrio delle eccitazioni elementari. Interessante è notare che solo se la velocità relativa è minore della velocità critica, allora la funzione soprascritta assumerà valori positivi per qualsiasi valore della quantità di moto. Inoltre, l'esistenza della (3.9) implica che non vi sia attrito fra la componente normale e la componente superfluida del liquido. Secondo quanto detto finora, la densità di massa può essere scritta sommando le due densità:

$$\rho = \rho_s + \rho_n \quad (3.10)$$

mentre il momento per unità di volume assume la forma

$$m\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n. \quad (3.11)$$

Da questa, si può ricavare una formula esplicita per la normale densità del fluido in termini di eccitazioni elementari presenti nel sistema. Nel sistema di riferimento del superfluido, si riscrive la (3.11) come

$$m\mathbf{j} = \int \mathbf{p} N_{\mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3.12)$$

in cui è presente la funzione data in (3.9), con la velocità della componente superfluida uguale a zero. Imponendo \mathbf{v}_s piccolo ed operando alcuni calcoli algebrici, si ottiene

$$\rho_n = -\frac{1}{3} \int \frac{dN_{\mathbf{p}}(\epsilon)}{d\epsilon} p^2 \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad (3.13)$$

per la quale si è utilizzato il fatto che la funzione (3.9) risulta essere una funzione isotropica del momento \mathbf{p} . Tale formula, per quanto risulti essere efficace in sistemi uniformi a basse temperature, risulta poco utile nel caso in cui il sistema sia in stato di disordine: il concetto di eccitazioni elementari non è correttamente definito e ciò implica che sia necessario utilizzare procedure differenti per il calcolo della componente normale del fluido. A titolo di esempio è qui calcolata la densità normale di un gas di Bose debolmente interagente. Nella (3.13), solo le energie di ordine $k_B T$ risultano rilevanti; inoltre, a basse temperature tali per cui si abbia $k_B T \ll \mu$, solo la parte dei fononi dello spettro dà contributo all'integrale. Si ottiene, infatti

$$\rho_n = -\frac{1}{3u} \int \frac{dN_{\mathbf{p}}}{dp} p^2 \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2\pi^2 (k_B T)^4}{45\hbar^3 c^5} \quad (3.14)$$

la quale mostra che la dipendenza dalla temperatura della densità normale differisce da quella mostrata precedentemente per il condensato. Nel limite opposto, invece, il risultato è il seguente:

$$\rho_n = m \int n_{\mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = mn_T; \quad (3.15)$$

esso mostra che la parte normale coincide con la deplezione termica del condensato. [Si sottolinea nuovamente che questi calcoli non sono consistenti in prossimità di temperature critiche]. L'apparente contraddizione con quanto detto prima, ovvero la non coerenza del gas ideale di Bose con la teoria proposta da Landau, è facilmente spiegabile ricordando che, in un gas ideale, la definizione stessa di (3.9) viola la condizione di positività.

3.2 Condensazione di Bose-Einstein e superfluidità

Scopo di questo paragrafo è quello di discutere la relazione fra condensato di Bose-Einstein e superfluidità. Per comprendere questa importante connessione è utile considerare le proprietà della funzione d'onda del condensato Ψ_0 soggetta a trasformazioni galileiane. Vale la pena notare che tale funzione risulta non essere una invariante galileiana dal momento in cui acquisisce un fattore di fase, nonostante il sistema sia uniforme e la densità del condensato sia costante.

Il fattore accennato poco sopra è facilmente calcolabile ricordando che l'operatore di campo $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ obbedisce alla equazione

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t). \quad (3.16)$$

Allora

$$\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) = \hat{\Psi}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(m\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}mv^2t)\right], \quad (3.17)$$

dove la soluzione risulta essere un vettore costante \mathbf{v} . Il parametro d'ordine, che corrisponde alla componente relativa al condensato dell'operatore (3.17) o, in particolare, al suo valore di aspettazione, obbedisce alla stessa legge di trasformazione. Nel sistema di coordinate in cui il campione è in equilibrio, la funzione d'onda del condensato di un fluido uniforme viene fornita dalla formula :

$$\Psi_0 = \sqrt{n_0} e^{iS} \quad (3.18)$$

dove

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\hbar} [m\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - (\frac{1}{2}mv^2 + \mu)t] \quad (3.19)$$

è la nuova fase. Tale equazione mostra che la velocità è proporzionale al gradiente della fase:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla S \quad (3.20)$$

e può a tutti gli effetti essere identificata con la velocità del superfluido. Questa uguaglianza stabilisce l'irrotazionalità dei moti superfluidi, in cui il parametro d'ordine assume il ruolo di potenziale velocità. Nel ricavo della (3.20) non si è minimamente tenuto conto del fatto che il sistema fosse un gas diluito, né che si lavorasse a temperatura uguale a zero: il risultato è una ovvia conseguenza della condensazione di Bose-Einstein. La relazione espressa da (3.20) non comprende il modulo del parametro d'ordine, il quale non condiziona direttamente le proprietà termodinamiche del sistema. Sarebbe tuttavia sbagliato identificare la densità del condensato con la densità del superfluido: a $T = 0$ tutto risulta immediato, a causa della deplezione quantistica del condensato.

3.3 Teoria idrodinamica dei superfluidi a temperatura $T = 0$

A $T = 0$ le equazioni che descrivono la dinamica macroscopica dei superfluidi assumono la classica forma di idrodinamica irrotazionale. Infatti, in assenza di eccitazioni termiche, lo stato macroscopico di un superfluido può essere descritto

in termini di due variabili, quali densità e velocità del superfluido. L'equazione per la densità di massa è data dalla seguente equazione di continuità:

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}_s \rho) = 0 \quad (3.21)$$

la quale esprime la conservazione della massa. Per ottenere la seconda equazione si utilizza il fatto che la fase del parametro d'ordine segua la legge

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = -\left(\frac{1}{2} m v_s^2 + \mu\right). \quad (3.22)$$

Applicando il gradiente all'equazione per la fase ed utilizzando l'espressione ricavata al capitolo precedente per la velocità del superfluido, si ottiene il risultato

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\frac{m}{2} \mathbf{v}_s^2 + \mu(\rho) \right) = 0, \quad (3.23)$$

dove il potenziale chimico è valutato localmente considerando il valore di un fluido uniforme a densità ρ . In presenza di un potenziale esterno, l'equazione per la velocità del campo diventa

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\frac{m}{2} \mathbf{v}_s^2 + \mu(\rho) + V_{ext} \right) = 0 \quad (3.24)$$

Una soluzione è data dalla configurazione in cui il superfluido sia fermo rispetto al sistema. In questo caso, il profilo della densità soddisfa l'equazione:

$$\mu \rho(\mathbf{r}) + V_{ext}(\mathbf{r}) = \mu_0 \quad (3.25)$$

che fornisce il profilo dello stato fondamentale nella approssimazione di Thomas-Fermi. Per gas diluiti le equazioni dell'idrodinamica possono esser ricavate partendo dalle equazioni di Gross-Pitaevskii dipendenti dal tempo e considerando il limite di Thomas-Fermi. In questo caso il potenziale chimico mostra una dipendenza lineare con la densità. La validità delle equazioni dell'idrodinamica è, comunque, applicata a superfluidi fortemente interagenti, come l'elio, così come ai superfluidi di Fermi, non citati in questa trattazione, la cui dipendenza del potenziale chimico dalla densità risulta notevolmente differente.

3.4 Basi di idrodinamica quantistica

In accordo con quanto detto in precedenza, le piccole oscillazioni del liquido corrispondono ad onde sonore. In meccanica quantistica tali oscillazioni corrispondono a fononi, ovvero quanti di onde sonore che possono essere descritti nell'ambito

quantistico, in cui la densità e la velocità del campo vengono sostituiti da relativi operatori. Al fine di determinare le regole di commutazione fra gli operatori densità e la velocità di campo, è conveniente derivare le classiche equazioni usando il formalismo Hamiltoniano. L'energia di un liquido, indicata con H , può essere presentata nella forma

$$H = \int \left(\frac{\rho}{2} (\nabla \phi)^2 + \epsilon(\rho) \right) d\mathbf{r} \quad (3.26)$$

in cui abbiamo introdotto il potenziale velocità ϕ definito da

$$\mathbf{v}_s = \nabla \phi \quad (3.27)$$

mentre $\epsilon(\rho)$ indica l'energia interna per unità di volume. Essendo che il potenziale chimico può essere ottenuto dall'energia interna, si può scrivere la variazione di H

$$\delta H = \int \left[-\text{div}(\rho \mathbf{v}_s) \delta \phi + \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\mu(\rho)}{m} \right) \delta \rho \right] d\mathbf{r}. \quad (3.28)$$

Così, le equazioni dell'idrodinamica possono essere presentate come segue

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \phi}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \rho} \quad (3.30)$$

da cui è possibile dedurre la regola di commutazione cui gli operatori devono obbedire (Landau, 1941):

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\rho}(\mathbf{r}') - \hat{\rho}(\mathbf{r}') \hat{\phi}(\mathbf{r}) = -i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.31)$$

Tale quantizzazione trasforma la idrodinamica classica in idrodinamica quantistica. Inoltre, la fase S del condensato, la quale determina il potenziale velocità tramite la relazione scritta al par.2 (3.20), diventa un operatore secondo la legge

$$\hat{S} = \frac{m}{\hbar} \hat{\phi}. \quad (3.32)$$

L'Hamiltoniana può quindi essere ottenuta scegliendo la appropriata operazione di simmetria:

$$\hat{H} = \int \left(\nabla \hat{\phi} \frac{\hat{\rho}}{2} \nabla \hat{\phi} + \epsilon(\hat{\rho}) \right) d\mathbf{r}. \quad (3.33)$$

L'idrodinamica quantistica presenta, come ogni teoria locale di campi quantizzati, divergenze ultraviolette. In questo caso specifico, tali divergenze hanno chiara origine fisica: infatti si sa che la teoria idrodinamica è valida solo nel regime macroscopico di piccoli vettori d'onda. Nonostante queste divergenze, la teoria risulta utilmente impiegata per la descrizione dei processi relativi ai fononi ed al calcolo del comportamento infrarosso delle funzioni di correlazione rilevanti. Ciò è particolarmente importante in sistemi in cui la teoria di Bogoliubov risulta non applicabile, ad esempio per superfluidi fortemente correlati o casi in minor numero di dimensioni. Si tenga a mente che il formalismo qui descritto è alla base di numerose teorie e problemi. Uno fra questi, solo accennato, è il decadimento dei fononi di Beliaev,

la cui teoria si basa sulla considerazione di una parte immaginaria dell'energia del fonone relativa alla probabilità di decadimento. Ciò implicherebbe, per un gas diluito di Bose, la non dipendenza della probabilità di decadimento del fonone dalla costante α , calcolabile attraverso la legge di dispersione di Bogoliubov.

3.5 Modello a due fluidi: primo e secondo suono

Questa sezione è dedicata alla descrizione della dinamica dei superfluidi a temperature finite. Saranno prese in esame situazioni in cui il percorso libero delle eccitazioni elementari risulta piccolo se confrontato con la sua lunghezza d'onda ed il cui equilibrio termodinamico è garantito dalle collisioni. In questo caso si possono definire densità e temperatura in ogni punto del fluido, oltre che il superfluido locale e le velocità normali. I risultati seguenti furono ottenuti da Landau (1941), il quale riuscì ad ottenere il Nobel per la fisica nel 1962. Si parta considerando oscillazioni a piccola ampiezza. La propagazione di questo tipo di oscillazioni a temperature finite è importante per lo studio delle conseguenze della superfluidità. L'equazione per la velocità del fluido ha la stessa forma scritta nel caso di temperatura uguale a zero:

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \mu = 0, \quad (3.34)$$

in cui, a temperature finite, è necessario prestare attenzione al fatto che il potenziale chimico dipenda anche dalla temperatura. L'equazione per la densità risulta anch'essa nella forma usuale della equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(m \mathbf{j}) = 0 \quad (3.35)$$

con la precisazione che la densità del momento può essere separata in componenti normale e superfluida:

$$m \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \quad (3.36)$$

i cui valori delle densità sono gli stessi che esse assumono in condizione di equilibrio. Da qui, si ha

$$m \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla P = 0 \quad (3.37)$$

che risulta essere la equazione dell'entropia per unità di volume. Infatti, nel caso in cui siano assenti processi dissipativi, l'entropia risulta conservata. Andando oltre, solo le eccitazioni elementari contribuiscono all'entropia, il cui trasferimento dipende strettamente dalla velocità normale del fluido. Si ha quindi

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}(s \mathbf{v}_n) = 0, \quad (3.38)$$

in cui, in regime lineare, l'entropia che compare nel secondo termine deve essere presa all'equilibrio.

Le quantità termodinamiche presenti nelle equazioni sopra non sono indipendenti, inoltre obbediscono alla equazione termodinamica di Gibbs-Duhem

$$\rho d\mu = -msdT + mdP. \quad (3.39)$$

Serve inoltre precisare che tale uguaglianza risulta valida solo in regime lineare: infatti le funzioni termodinamiche possono in generale manifestare una dipendenza dalla velocità relativa fra la componente normale e quella superfluida. Escludendo il vettore \mathbf{j} nelle equazioni precedenti, si ottiene la seguente formula

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \nabla^2 P, \quad (3.40)$$

che mette in relazione le variazioni di tempo e spazio con densità e pressione, rispettivamente. Si procede ora a ricavare una equazione che descriva una relazione fra tempo e spazio con, rispettivamente, temperatura ed entropia. Si scrive, infatti:

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} + \frac{\tilde{s}\rho_s}{\rho} \text{div}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = 0 \quad (3.41)$$

dove $\tilde{s} = s/\rho$. Inoltre, seguendo la relazione termodinamica di G-D:

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \rho \tilde{s} \nabla T = 0 \quad (3.42)$$

che, combinata con la precedente, fornisce il seguente risultato

$$\frac{\partial^2 \tilde{s}}{\partial t^2} = \frac{\rho_s \tilde{s}^2}{\rho_n} \nabla^2 T. \quad (3.43)$$

Da ciò si ricava la espressione per la velocità del suono (Landau 1941)

$$c^4 - \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\tilde{s}} + \frac{\rho_s T \tilde{s}^2}{\rho_n \tilde{c}_v} \right] c^2 + \frac{\rho_s T \tilde{s}^2}{\rho_n \tilde{c}_v} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = 0, \quad (3.44)$$

in cui \tilde{s} corrisponde ad una trasformazione isentropica, mentre

$$\tilde{c}_v = T \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial T} \right)_\rho \quad (3.45)$$

risulta essere il calore specifico a volume costante per unità di massa. La (3.44) gode di due soluzioni distinte, corrispondenti a due velocità del suono, per $\rho_s = 0$: ciò è conseguenza del fatto che in un superfluido esistono due gradi di libertà associati alle componenti normale e superfluida. Nel caso in cui ρ_s tende a zero (T tende a T_c), la soluzione superiore, corrispondente al primo suono, risulta calcolata attraverso la velocità isentropica

$$c_1^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\tilde{s}} \quad (3.46)$$

e mostra un continuo passaggio alla velocità usuale del suono sopra T_c . Allo stesso modo, la soluzione inferiore corrispondente al secondo suono assume la forma

$$c_2^2 = \frac{\rho_s T \tilde{s}^2}{\rho_n \tilde{C}_p}, \quad (3.47)$$

e sparisce quando vale $\rho_s = 0$. Per sistemi caratterizzati da un piccolo coefficiente di espansione termica, l'equazione per il secondo suono fornisce una eccellente approssimazione alla velocità del secondo suono nell'intera regione superfluida $0 < T < T_c$. Questa equazione, infatti, mostra l'importante ruolo coperto dalla densità del superfluido e fu realmente impiegata per determinare la dipendenza della densità dell'elio superfluido dalla temperatura in un ampio range di valori di T . Tuttavia, le equazioni che definiscono primo e secondo suono risultano non adeguate alla descrizione delle velocità del suono in gas di Bose diluiti per valori intermedi di T , a causa della alta compressibilità isoterma del sistema. Tramite alcune semplici correzioni, si possono prevedere le formule per primo e secondo suono (Lee, Yang 1959)

$$c_1^2 = \frac{5}{3} \frac{g_{5/2}}{g_{3/2}} \frac{k_B T}{m} \quad (3.48)$$

$$c_2^2 = \frac{gn_0(T)}{m} \quad (3.49)$$

quest'ultima ricavata utilizzando l'approssimazione di Hartree-Fock. Analizzando il caso di gas diluiti, invece, è possibile spiegare perchè, a temperature molto maggiori di μ/k_B , il secondo suono coincida fisicamente con l'oscillazione del condensato, condividendone lo stesso comportamento del modello di suono a $T = 0$ previsto dalla teoria di Bogoliubov. La conferma sperimentale di questo risultato è tuttavia particolarmente recente: l'esperimento relativo fu realizzato da Meppelink et al. (2009).

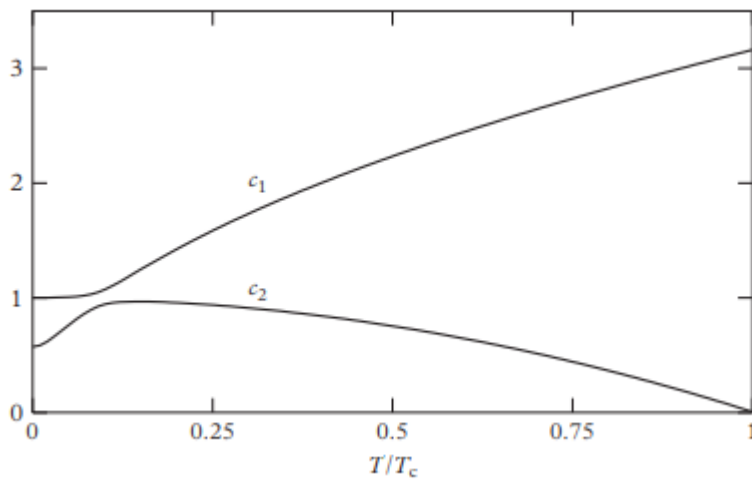


Figura 3.1: rappresentazione schematica delle velocità di primo e secondo suono in un gas diluito in funzione della temperatura, in unità del modello a $T = 0$ di Bogoliubov.

3.6 Cenno ai vortici quantizzati

I vortici quantizzati sono singolarità topologiche tipiche dei superfluidi in rotazione. Si tratta in sostanza di nodi della funzione d'onda macroscopica che descrive il sistema. L'esistenza dei vortici nell'elio 4 superfluido venne teorizzata da Onsager nel 1947 e osservata sperimentalmente negli anni cinquanta. Riprendendo l'idea delineata nel corso dell'introduzione e delle sezioni precedenti è possibile mostrare come gli stessi gas diluiti ultrafreddi al centro della trattazione manifestino, sotto rotazione, il medesimo comportamento dell'elio liquido, rispetto al quale presentano però un sostanziale vantaggio: si può descrivere il comportamento dei gas di Bose sfruttando la teoria di Gross-Piteavskii e individuare, nel caso specifico, la soluzione vorticoso dell'equazione, capace di fornire una descrizione teorica del fenomeno. Si prenderà in considerazione soltanto il caso stazionario. Resta da chiarire per quale motivo è possibile considerare superfluidi i gas di Bose diluiti, debolmente imperfetti. In tal senso è necessario ricorrere alla teoria della superfluidità sviluppata da Landau negli anni quaranta. È noto come l'eventuale dissipazione cui è soggetto un fluido debba essere legata alla creazione spontanea di una eccitazione con momento associato \mathbf{p} non arbitraria, ma soggetta a una specifica legge di dispersione $\epsilon(\mathbf{p})$, detta anche spettro di eccitazione. Si dimostra che tale eccitazione può avvenire spontaneamente solo se la velocità v del fluido è maggiore della velocità critica v_c

$$v > v_c = \min_{\mathbf{p}} \frac{\epsilon(\mathbf{p})}{\mathbf{p}}. \quad (3.50)$$

Per un gas ideale $v_c = 0$, l'eccitazione è sempre spontanea e si ha quindi dissipazione. In tal senso il gas ideale non può avere comportamento superfluidico. È necessaria l'aggiunta di un'interazione tra le particelle capace di modificare $\epsilon(\mathbf{p})$ in modo che la velocità critica risulti maggiore di zero. Le soluzioni linearizzate della GPE sono descritte dalla teoria delle eccitazioni elementari di Bogoliubov. Conseguentemente per un gas di Bose diluito lo spettro di eccitazione è rappresentato dalla relazione di dispersione di Bogoliubov:

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2 + \frac{gn}{m}\mathbf{p}^2}. \quad (3.51)$$

La velocità critica diventa quindi

$$v_c = \sqrt{\frac{gn}{m}} \quad (3.52)$$

pari alla velocità del suono c nel condensato. Al di sotto di tale valore i gas di Bose diluiti presentano comportamento superfluidico, ossia completa assenza di viscosità. Analizzando il comportamento dei gas di Bose sotto rotazione è possibile riscontrare delle profonde differenze rispetto al caso classico. Un fluido normale confinato in un recipiente in rotazione con velocità Ω ruota rigidamente con velocità $v_n = \Omega r$, dove r rappresenta la distanza dall'asse di rotazione. Il momento angolare è trasferito dal recipiente al fluido grazie alla condizione al contorno di non scivolamento (no slip). Nel caso superfluidico, come anticipato, la descrizione

del fenomeno richiede di richiamare la teoria di Gross-Pitaevskii, per fornire soluzione sia al caso standard che al caso della equazione modificata. In entrambi i casi, la funzione d'onda del condensato è caratterizzata come segue

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n(\mathbf{r})}e^{iS(\mathbf{r})}. \quad (3.53)$$

Se la fase risulta non costante, allora si genera un flusso con velocità pari a

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla S \quad (3.54)$$

che risulta avere rotore nullo. Ciò chiarifica quanto detto in precedenza ed evidenzia la natura irrotazionale del sistema. Nel caso specifico di un confinamento cilindrico, ad esempio, la fase assume nelle nuove coordinate a $S = s\theta$ e il momento angolare associato alla circolazione risulta quantizzato. La velocità diventa inversamente proporzionale al raggio e diverge per r che tende a zero. Conseguentemente, per $r = 0$ la densità del condensato deve annullarsi per evitare la divergenza dell'energia cinetica. Si individua, quindi, nell'origine, il nucleo del vortice.

Conclusioni

Con l'analisi sui gas di Bose presentata nel capitolo 2 si è cercato di approfondire gli aspetti caratteristici di un condensato. La teoria di Bogoliubov rappresenta, in realtà, la congiunzione fra due teorie che, altrimenti, sembrerebbero non essere collegate. La ricaduta più eclatante dello spettro energetico delle eccitazioni emerge, infatti, nel parlare di superfluidità: è proprio grazie al potenziale di interazione tra particelle che compare in quest'equazione che il condensato di Bose-Einstein reale soddisfa il criterio di Landau, mentre questo non accade per il condensato ideale. Da qui si è potuti approdare alla descrizione a due componenti del fenomeno della superfluidità, per cui si osservano alcuni fenomeni in cui non si ha viscosità, dove è la componente condensata ad essere osservata, e altri fenomeni in cui invece la viscosità è dovuta alla presenza delle eccitazioni elementari che costituiscono un fluido normale. Va detto però che in generale non possiamo identificare la percentuale del condensato con la componente superfluida, e che nei sistemi fortemente interagenti, come l'elio ^4He , che presentano comportamento superfluido il condensato costituisce solo l'8% circa del fluido. Queste conclusioni servono dunque solamente a dare un semplice modello per descrivere qualitativamente tale fenomeno: in realtà, la relazione tra condensato di Bose-Einstein e superfluidità è molto più complicata.

Bibliografia

- [1] L.Ferrari. *Exact canonic eigenstates of the truncated Bogoliubov Hamiltonian in an interacting bosons gas*. Physica B: Condensed Matter, Volume 496, Pages 38-44, 2016.
- [2] L.Ferrari *Collective excitations in an interacting boson gas beyond Bogoliubov theory*. Physica B: Condensed Matter, Volume 512, Pagine 12-15, 2017.
- [3] L.Ferrari. *Bogoliubov theory of interacting bosons: new insights from an old problem*. arXiv:1612.03617v3, 2017.
- [4] P.Kapitza. *Viscosity of liquid helium below the λ -point*. Nature, 1938.
- [5] Kathrin Kleinbach. *Bose-Einstein Condensation: Basics, Gross-Pitaevskii equation and interactions*. Institut für Theoretische Physik, 2012.
- [6] L.D.Landau. *The Theory of superfluidity of helium II*. J.Phys, 1941.
- [7] Lev Pitaevskii, Sandro Stringari. *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*. Oxford Science Publications, 1999.
- [8] Lev Pitaevskii, Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Butterworth Heinemann, 1987.
- [9] S.J.Putterman. *Superfluid Hydrodynamics*. North-Holland|American Elservier, 1974.
- [10] Andreas Schmitt. *Introduction to superfluidity*. Springer, 2014.

Ringraziamenti

Prendo le distanze dal registro utilizzato sopra, per abbandonarmi ai più sinceri ringraziamenti che vorrei dedicare alle persone che mi sono state accanto in questo faticoso, seppur breve, percorso universitario e di vita. Un grazie, in primis, al professor Loris Ferrari per professionalità, disponibilità e comprensione. Di seguito, ma non per importanza, un grazie alla mamma, per la fiducia sempre mostrata nei miei confronti; alla mia famiglia, a cui devo e dovrò sempre molto. Un grazie alla mia ragazza Eleonora, preziosa e costante presenza in questo buffo cammino. E ancora, ai miei fratelli Alan, Alessandro, Alfredo, Angelo, Enrico, Federico, Giacomo, Guglielmo, Matteo, Nicola, Pier, Rafael: i compagni di viaggio migliori. Ai miei amici e compagni di corso, in particolare a Andrea, Cesare, Davide, Lorenzo, Mattia e Michele, la cui pazienza è stata messa a dura prova nel corso dei tre anni. Vorrei ringraziare chiunque abbia contribuito -anche chi non sa di averlo fatto!- a rendere questi tre anni qualcosa che, senz'ombra di dubbio, occuperà un discreto spazio dell'album dei ricordi.